Contents

[Решение задачи коммивояжера 1](#_Toc384122114)

[ПРИМЕР. 1](#_Toc384122115)

[Пример решения задачи коммивояжера 2](#_Toc384122116)

[метод ветвей и границ (алгоритм Литтла или исключения подциклов). 2](#_Toc384122117)

[Пример решения задачи коммивояжера венгерским методом 8](#_Toc384122118)

[Примеры решений на тему "Задача коммивояжера" 9](#_Toc384122119)

## Решение задачи коммивояжера

В задаче коммивояжера для формирования оптимального маршрута объезда *n* городов необходимо выбрать один лучший из *(n-1)!* вариантов по критерию времени, стоимости или длине маршрута. Эта задача связана с определением гамильтонова цикла минимальной длины. В таких случаях множество всех возможных решений следует представить в виде дерева - связного графа, не содержащего циклов и петель. Корень дерева объединяет все множество вариантов, а вершины дерева — это подмножества частично упорядоченных вариантов решений.

**Методы решения задачи коммивояжера**

1. метод ветвей и границ (алгоритм Литтла или исключения подциклов).
2. венгерский метод.

## ПРИМЕР.

В качестве начального маршрута выбирается любой,

например, X0 = (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6);(6,1).

Оценка для этого маршрута равна F(X0) = 43 + 65 + 73 + 22 + 8 + 80 = 291. Для определения нижней границы множества используют *операцию редукции*, для чего в каждой строке матрицы D находят минимальный элемент: di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | di |
| 1 | M | 43 | 39 | 38 | 22 | 9 | 9 |
| 2 | 72 | M | 65 | 57 | 52 | 70 | 52 |
| 3 | 13 | 74 | M | 73 | 59 | 39 | 13 |
| 4 | 81 | 87 | 86 | M | 22 | 17 | 17 |
| 5 | 89 | 33 | 65 | 15 | M | 8 | 8 |
| 6 | 80 | 30 | 10 | 30 | 18 | M | 10 |

Затем вычитают di из элементов рассматриваемой строки. Поэтому во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 34 | 30 | 29 | 13 | 0 |
| 2 | 20 | M | 13 | 5 | 0 | 18 |
| 3 | 0 | 61 | M | 60 | 46 | 26 |
| 4 | 64 | 70 | 69 | M | 5 | 0 |
| 5 | 81 | 25 | 57 | 7 | M | 0 |
| 6 | 70 | 20 | 0 | 20 | 8 | M |

Такую же операцию редукции проводят по столбцам: dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 34 | 30 | 29 | 13 | 0 |
| 2 | 20 | M | 13 | 5 | 0 | 18 |
| 3 | 0 | 61 | M | 60 | 46 | 26 |
| 4 | 64 | 70 | 69 | M | 5 | 0 |
| 5 | 81 | 25 | 57 | 7 | M | 0 |
| 6 | 70 | 20 | 0 | 20 | 8 | M |
| dj | 0 | 20 | 0 | 5 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются константами приведения.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | M | 14 | 30 | 24 | 13 | 0 |
| 2 | 20 | M | 13 | 0 | 0 | 18 |
| 3 | 0 | 41 | M | 55 | 46 | 26 |
| 4 | 64 | 50 | 69 | M | 5 | 0 |
| 5 | 81 | 5 | 57 | 2 | M | 0 |
| 6 | 70 | 0 | 0 | 15 | 8 | M |

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H = ∑di + ∑dj = 9+52+13+17+8+10+0+20+0+5+0+0 = 134. Элементы матрицы dijсоответствуют расстоянию от пункта i до пункта j. Длина маршрута определяется выражением: F(Mk) = ∑dij. Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij.

Затем в ходе последующих итераций, определяется ребро ветвлений. Все множество маршрутов относительно этого ребра разбивается на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

## Пример решения задачи коммивояжера

## метод ветвей и границ (алгоритм Литтла или исключения подциклов).

Возьмем в качестве произвольного маршрута:

X0 = (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,1)

Тогда F(X0) = 90 + 40 + 60 + 50 + 20 = 260

Для определения нижней границы множества воспользуемся **операцией редукции** или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент. di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 90 | 80 | 40 | 100 | 40 |
| **2** | 60 | M | 40 | 50 | 70 | 40 |
| **3** | 50 | 30 | M | 60 | 20 | 20 |
| **4** | 10 | 70 | 20 | M | 50 | 10 |
| **5** | 20 | 40 | 50 | 20 | M | 20 |

Затем вычитаем di из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 50 | 40 | 0 | 60 |
| **2** | 20 | M | 0 | 10 | 30 |
| **3** | 30 | 10 | M | 40 | 0 |
| **4** | 0 | 60 | 10 | M | 40 |
| **5** | 0 | 20 | 30 | 0 | M |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент: dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 50 | 40 | 0 | 60 |
| **2** | 20 | M | 0 | 10 | 30 |
| **3** | 30 | 10 | M | 40 | 0 |
| **4** | 0 | 60 | 10 | M | 40 |
| **5** | 0 | 20 | 30 | 0 | M |
| dj | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются **константами приведения**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | M | 40 | 40 | 0 | 60 |
| **2** | 20 | M | 0 | 10 | 30 |
| **3** | 30 | 0 | M | 40 | 0 |
| **4** | 0 | 50 | 10 | M | 40 |
| **5** | 0 | 10 | 30 | 0 | M |

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:

H = ∑di + ∑dj

H = 40+40+20+10+20+0+10+0+0+0 = 140

Элементы матрицы dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.

Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей nxn с неотрицательными элементами dij >=0

Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.

Длина маршрута определяется выражением: F(Mk) = ∑dij

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij .

**Шаг №1**.

**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 40 | 40 | 0(40) | 60 | 40 |
| **2** | 20 | M | 0(20) | 10 | 30 | 10 |
| **3** | 30 | 0(10) | M | 40 | 0(30) | 0 |
| **4** | 0(10) | 50 | 10 | M | 40 | 10 |
| **5** | 0(0) | 10 | 30 | 0(0) | M | 0 |
| dj | 0 | 10 | 10 | 0 | 30 | 0 |

d(1,4) = 40 + 0 = 40; d(2,3) = 10 + 10 = 20; d(3,2) = 0 + 10 = 10; d(3,5) = 0 + 30 = 30; d(4,1) = 10 + 0 = 10; d(5,1) = 0 + 0 = 0; d(5,4) = 0 + 0 = 0;

Наибольшая сумма констант приведения равна (40 + 0) = 40 для ребра (1,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (1,4) и (1\*,4\*).

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(1\*,4\*) = 140 + 40 = 180

Исключение ребра (1,4) проводим путем замены элемента d14 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (1\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | M | 40 | 40 | M | 60 | 40 |
| **2** | 20 | M | 0 | 10 | 30 | 0 |
| **3** | 30 | 0 | M | 40 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 50 | 10 | M | 40 | 0 |
| **5** | 0 | 10 | 30 | 0 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 40 |

Включение ребра (1,4) проводится путем исключения всех элементов 1-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d41 заменяем на М, для исключения образования негамильт. цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.

Сумма констант приведения сокращенной матрицы: ∑di + ∑dj = 10

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **2** | 20 | M | 0 | 30 | 0 |
| **3** | 30 | 0 | M | 0 | 0 |
| **4** | M | 50 | 10 | 40 | 10 |
| **5** | 0 | 10 | 30 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |

Нижняя граница подмножества (1,4) равна: H(1,4) = 140 + 10 = 150 ≤ 180

Поскольку нижняя граница этого подмножества (1,4) меньше, чем подмножества (1\*,4\*), то ребро (1,4) включаем в маршрут с новой границей H = 150

**Шаг №2**.

**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **2** | 20 | M | 0(20) | 30 | 20 |
| **3** | 30 | 0(10) | M | 0(30) | 0 |
| **4** | M | 40 | 0(30) | 30 | 30 |
| **5** | 0(30) | 10 | 30 | M | 10 |
| dj | 20 | 10 | 0 | 30 | 0 |

d(2,3) =20 + 0 =20; d(3,2) = 0 + 10 =10; d(3,5)=0 + 30=30; d(4,3) =30 + 0 =30; d(5,1) =10 + 20 =30;

Наибольшая сумма констант приведения равна (0 + 30) = 30 для ребра (3,5), следовательно, множество разбивается на два подмножества (3,5) и (3\*,5\*).

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(3\*,5\*) = 150 + 30 = 180

Исключение ребра (3,5) проводим путем замены элемента d35 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (3\*,5\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **2** | 20 | M | 0 | 30 | 0 |
| **3** | 30 | 0 | M | M | 0 |
| **4** | M | 40 | 0 | 30 | 0 |
| **5** | 0 | 10 | 30 | M | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 30 | 30 |

Включение ребра (3,5) проводится путем исключения всех элементов 3-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d53 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.

Сумма констант приведения сокращенной матрицы: ∑di + ∑dj = 10

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 20 | M | 0 | 0 |
| **4** | M | 40 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 10 | M | 0 |
| dj | 0 | 10 | 0 | 10 |

Нижняя граница подмножества (3,5) равна:

H(3,5) = 150 + 10 = 160 ≤ 180

Поскольку нижняя граница этого подмножества (3,5) меньше, чем подмножества (3\*,5\*), то ребро (3,5) включаем в маршрут с новой границей H = 160

**Шаг №3**.

**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 20 | M | 0(20) | 20 |
| **4** | M | 30 | 0(30) | 30 |
| **5** | 0(20) | 0(30) | M | 0 |
| dj | 20 | 30 | 0 | 0 |

d(2,3) = 20 + 0 = 20; d(4,3) = 30 + 0 = 30; d(5,1) = 0 + 20 = 20; d(5,2) = 0 + 30 = 30;

Наибольшая сумма констант приведения равна (0 + 30) = 30 для ребра (5,2), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,2) и (5\*,2\*).

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(5\*,2\*) = 160 + 30 = 190

Исключение ребра (5,2) проводим путем замены элемента d52 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,2\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 20 | M | 0 | 0 |
| **4** | M | 30 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | M | M | 0 |
| dj | 0 | 30 | 0 | 30 |

Включение ребра (5,2) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 2-го столбца, в которой элемент d25 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (2 x 2), которая подлежит операции приведения.

Сумма констант приведения сокращенной матрицы: ∑di + ∑dj = 20

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **3** | di |
| **2** | 20 | 0 | 0 |
| **4** | M | 0 | 0 |
| dj | 20 | 0 | 20 |

Нижняя граница подмножества (5,2) равна:

H(5,2) = 160 + 20 = 180 ≤ 190

Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,2) меньше, чем подмножества (5\*,2\*), то ребро (5,2) включаем в маршрут с новой границей H = 180

В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (2,1) и (4,3).

В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:

(1,4), (4,3), (3,5), (5,2), (2,1),

Длина маршрута равна F(Mk) = 180

## Пример решения задачи коммивояжера венгерским методом

Исходная матрица имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M | 3 | 4 | 2 | 7 |
| 5 | M | 8 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | M | 7 | 5 |
| 3 | 2 | 9 | M | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 5 | M |

1. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| M | 1 | 2 | 0 | 5 | **2** |
| 2 | M | 5 | 1 | 0 | **3** |
| 0 | 1 | M | 5 | 3 | **2** |
| 2 | 1 | 8 | M | 0 | **1** |
| 0 | 1 | 2 | 4 | M | **1** |

 Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 2 | M | 3 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | M | 5 | 3 |
| 2 | 0 | 6 | M | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 4 | M |
| **0** | **1** | **2** | **0** | **0** |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

 2. Методом проб и ошибок проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M | [-0-] | [-0-] | **[0]** | 5 |
| 2 | M | 3 | 1 | **[0]** |
| **[0]** | [-0-] | M | 5 | 3 |
| 2 | **[0]** | 6 | M | [-0-] |
| [-0-] | [-0-] | **[0]** | 4 | M |

В результате получаем эквивалентную матрицу Сэ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 2 | M | 3 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | M | 5 | 3 |
| 2 | 0 | 6 | M | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 4 | M |

 4. Методом проб и ошибок определяем матрицу назначения Х, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить минимальную стоимость назначения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| M | [-0-] | [-0-] | **[0]** | 5 |
| 2 | M | 3 | 1 | **[0]** |
| **[0]** | [-0-] | M | 5 | 3 |
| 2 | **[0]** | 6 | M | [-0-] |
| [-0-] | [-0-] | **[0]** | 4 | M |

 Cmin = 2 + 3 + 2 + 2 + 3 = 12

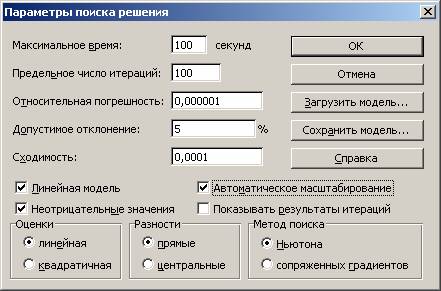
## Примеры решений на тему "Задача коммивояжера"

Решить задачу коммивояжера с заданной матрицей расстояний алгоритмом Литтла.

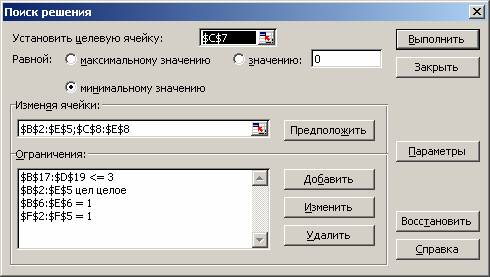
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | M | 35 | 45 | 20 |
| 2 | 9 | M | 17 | 6 |
| 3 | 21 | 31 | M | 2 |
| 4 | 30 | 15 | 40 | M |

## Алгоритм решения задачи коммивояжера в Excel

1. Формирование шаблона
2. Открыть шаблон в **Excel** и выполнить команду ***Сервис / Поиск решения***
3. Установка параметров



1. Установка ограничений



Ограничения дополнительных переменных "≤ n - 2" , где n - размерность матрицы